

1 Aufgaben

Aufgabe 1:

Mach eine Kurvendiskussion (untersuche die folgende Funktionen auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte) mit folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

b) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Aufgabe 2:

Untersuche die folgende Funktionen auf Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, und Gleichung bzw. Steigung der Wendetangenten.

a) $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$

b) $f(x) = \frac{x^3}{6} + x^2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

2 Lösungen

Aufgabe 1:

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f''(x) = 2$$

aa) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$N_1(2|0), N_2(-1|0)$

ab) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

$$E_1\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{9}{4}\right)$$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$$f''(x) = 2$$

$$f''(x_1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } f(x) &= -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2} \\
f(x) &= -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2} \\
f'(x) &= -x + 3 \\
f''(x) &= -1
\end{aligned}$$

ba) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned}
-\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2} &= 0 \mid \cdot (-2) \\
x^2 - 6x + 5 &= 0 \\
x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 5} \\
x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{4} \\
x_1 &= 5 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

$N_1(5|0), N_2(1|0)$

bb) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
-x + 3 &= 0 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(3) = -\frac{9}{2} + 3 \cdot 3 - \frac{5}{2} = 2$$

$E_1(3|2)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$$f''(x) = -1$$

$$\begin{aligned}
f''(x_1) &= -1 < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt} \\
HP(3|2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\
f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\
f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\
f''(x) &= 6x - 12 \\
f'''(x) &= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ca) \quad \text{Nullstellen: } f(x) &= 0 \\
x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 \\
x(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x^2 - 6x + 9 &= 0 \\
x_{2,3} &= 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3 \\
x_2 &= 3 \\
x_3 &= 3
\end{aligned}$$

$$N_1(0|0), N_2(3|0), N_3(3|0)$$

$$\begin{aligned}
cb) \quad \text{Extremwerte: } f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 12x + 9 &= 0 \\
x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} \\
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \\
f(x_2) &= f(3) = 27 - 54 + 27 = 0
\end{aligned}$$

$$E_1(1|4), E_2(3|0)$$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$\begin{aligned}
f''(x_1) &= f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \rightarrow \text{HP}(1|4) \\
f''(x_2) &= f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \rightarrow \text{TP}(3|0)
\end{aligned}$$

$$cc) \quad \text{Wendepunkt: } f''(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
6x - 12 &= 0 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \text{ WP}(2|2)$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{x^3}{4} - 3x \\ f(x) &= \frac{x^3}{4} - 3x \\ f'(x) &= 3\frac{x^2}{4} - 3 \\ f''(x) &= \frac{3}{2}x \\ f'''(x) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

aa) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{4} - 3x &= 0 \\ x\left(\frac{x^2}{4} - 3\right) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \frac{x^2}{4} - 3 &= 0 \\ x^2 - 12 &= 0 \\ x_{2,3} &= \pm\sqrt{12} \\ x_2 &= \sqrt{12} \\ x_3 &= -\sqrt{12} \end{aligned}$$

$N_1(0|0), N_2(\sqrt{12}|0), N_3(-\sqrt{12}|0)$

ab) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3\frac{x^2}{4} - 3 &= 0 \\ 3\frac{x^2}{4} &= 3 \\ \frac{x^2}{4} &= 1 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1,2} &= \pm 2 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(2) = \frac{8}{4} - 6 = -4 \\ f(x_2) &= -\frac{8}{4} + 6 = 4 \end{aligned}$$

$E_1(2|-4), E_2(-2|4)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$$f''(x) = \frac{3}{2}x$$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 > 0 \rightarrow \text{TP}(2|-4) \\ f''(x_2) &= f''(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3 < 0 \rightarrow \text{HP}(-2|4) \end{aligned}$$

ac) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \quad \text{X-Werte in die ursprüngliche Funktion } f(x) \text{ einsetzen.}$$

$$f(x_w) = f(0) = 0$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?

$$f'''(x) = \frac{3}{2} \neq 0 \text{ WP}(0|0)$$

Wendetangente bestimmen:

X-Werte in die erste Ableitung der Funktion einsetzen:

$$f'(x_w) = f'(0) = -3 = m_t$$

$$y - y_w = m_t(x - x_w)$$

$$y - 0 = -3(x - 0)$$

$$y = -3x$$

$$t_w = y = -3x$$

Aufgabe 2b:

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= \frac{x^3}{6} + x^2 \\ f(x) &= \frac{x^3}{6} + x^2 \\ f'(x) &= \frac{x^2}{2} + 2x \\ f''(x) &= x + 2 \\ f'''(x) &= 1 \end{aligned}$$

ba) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{6} + x^2 &= 0 \\ x^2\left(\frac{x}{6} + 1\right) &= 0 \\ x_{1,2} &= 0 \\ \frac{x}{6} + 1 &= 0 \\ \frac{x}{6} &= -1 \\ x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$N_1(0|0), N_2(0|0), N_3(-6|0)$

bb) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} + 2x &= 0 \\ x^2 + 4x &= 0 \\ x(x + 4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x + 4 &= 0 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(0) = 0 \\ f(x_2) &= f(-4) = -\frac{64}{6} + 16 = 5\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$E_1(0|0), E_2(-4|5\frac{1}{3})$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$$f''(x) = x + 2$$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = 2 \rightarrow \text{TP}(0|0) \\ f''(x_2) &= f''(-4) = -2 \rightarrow \text{HP}(-4|5\frac{1}{3}) \end{aligned}$$

bc) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 \\ x_w &= -2 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_w) = f(-2) = -\frac{8}{6} + 4 = \frac{8}{3}$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?

$$f'''(x) = 1 \neq 0$$

Wendetangente bestimmen:

X-Werte in die erste Ableitung der Funktion einsetzen:

$$f'(x_w) = f'(-2) = \frac{4}{2} - 4 = -2 = m_t$$

$$y - y_w = m_t(x - x_w)$$

$$y - \frac{8}{3} = -2(x + 2)$$

$$y - \frac{8}{3} = -2x - 4$$

$$y = -2x - 4 + \frac{8}{3}$$

$$y = -2x - \frac{4}{3}$$

$$t_w = y = -2x - \frac{4}{3}$$

Aufgabe 2c:

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= x^3 - 3x^2 + 4 \\ f(x) &= x^3 - 3x^2 + 4 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

ca) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$\text{Raten } x_1 = 2$$

$$8 - 12 + 4 = 0$$

Polydivision liefert $x^2 - x - 2$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -1$$

$N_1(2|0), N_2(2|0), N_3(-1|0)$

cb) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$x(3x - 6) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$3x - 6 = 0$$

$$x_2 = 2$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(0) = 4$$

$$f(x_2) = f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$$

$E_1(0|4), E_2(2|0)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x_1) = f''(0) = -6 \rightarrow HP(0|4)$$

$$f''(x_2) = f''(2) = 12 - 6 = 6 \rightarrow TP(2|0)$$

cc) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$6x - 6 = 0$$

$$x_w = 1$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_w) = f(1) = 1 - 3 + 4 - 2$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?

$$f'''(x) = 6 \neq 0 WP(1|2)$$

Wendetangente bestimmen:

X-Werte in die erste Ableitung der Funktion einsetzen:

$$f'(x_w) = f'(1) = 3 - 6 = -3 = m_t$$

$$y - y_w = m_t(x - x_w)$$

$$y - 2 = -3(x - 1) = -3x + 3$$

$$y = -3x + 5$$

$$t_w = y = -3x + 5$$

Quelle: Kurvendiskussion und mehr Aufgaben

Mit freundlicher Unterstützung von: Beautystudio Freiburg